Boole Algebra

E.S.Wojciulewitsch, 1974

Boole-algebra

1. Een en ander over logica

In de logica wordt o.a.de **waarheidswaarde** van **uitspraken** bestudeerd. Wat uitspraken en waarheidswaarden precies zijn, is strikt genomen niet in een definitie vast te leggen. Intuïtief is er echter een vermoeden dat uitspraken ofwel **waar** of **onwaar** zijn. Daarom wordt bij wijze van axioma gesteld:

Elke uitspraak is waar of onwaar

Voor elke 'geldige' uitspraak zijn er dus twee mogelijkheden : ze is waar of ze is onwaar. De logica die vanuit deze veronderstelling wordt opgebouwd heet **binaire logica**. We moeten dus beschikken over een middel om voor elke uitspraak uit te maken of ze waar is of onwaar. De bewering "kaviaar is lekker" is binnen deze context geen uitspraak. Er is immers geen mogelijkheid om ondubbelzinnig uit te maken wanneer iets lekker is of niet. Verschillende 'proevers' zullen daar verschillende meningen over hebben.

Dit opent natuurlijk de vraag of zoiets als een 'ternaire' logica, of een 'meer waarden' logica zou kunnen ontwikkeld worden. Het uitwerken van het positieve antwoord op deze vraag valt echter buiten de bedoeling van deze tekst. Wij gaan ons hier beperken tot het geven van enkele voorbeelden van (binaire) uitspraken.

De uitspraken zelf worden voorgesteld door de letters p, q, r, … :

p = "Antwerpen ligt aan de Seine"
q = "3 × 6 =18"
r = "Aan de noordpool is de temperatuur hoger dan 1000°C"
s = "Rubens was een aardbewoner"
t = "België is een Sovjetrepubliek"

Op de verzameling van alle uitspraken U, definiëren we verschillende 'bewerkingen', zoals de **disjunctie**, de **conjunctie** en de **negatie**. Deze bewerkingen zijn inwendig in U : ze leveren steeds terug een uitspraak op. Enkele voorbeelden:

$p \vee q$ = "Antwerpen ligt aan de Seine *of* 3 × 6 = 18"
$p \wedge q$ = "Antwerpen ligt aan de Seine *en* 3 × 6 = 18"
$\sim p$ = "Antwerpen ligt *niet* aan de Seine"

Het eerste voorbeeld illustreert een disjunctie, het tweede een conjunctie en het derde een negatie. Vormen we nu op de vermelde verzameling U alle mogelijke disjunctie, conjuncties en negaties, dan kunnen van de nieuwe bekomen uitspraken de waarheidswaarden bepaald worden. De conclusies die we daaruit trekken zijn samengevat in de volgende tabel. De letters x, y, , … stellen daarbij willekeurige uitspraken voor.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$\sim x$
onwaar	onwaar	onwaar	onwaar	waar
onwaar	waar	waar	onwaar	waar
waar	onwaar	waar	onwaar	onwaar
waar	waar	waar	waar	onwaar

2. De twee-elementenalgebra

Is U nog steeds de verzameling van alle uitspraken en $B = \{0,1\}$, dan kunnen we een afbeelding f definiëren

$$f: U \to B: x \to f(x)$$

waarvoor geldt :

$$f(x) = 0 \text{ als } x \text{ onwaar is}$$
$$f(x) = 1 \text{ als } x \text{ waar is}$$

Zo geldt voor de reeds eerder vermelde uitspraken :

$$f(p) = f(r) = f(t) = 0$$
$$f(q) = f(s) = 1$$

Deze afbeelding f laat toe een aantal bewerkingen op B te definiëren. Zo definiëren we een "**optelling**", een "**vermenigvuldiging**", en een **complementering** respectievelijk voorgesteld door "+", "·" en "c". We mogen deze bewerkingen niet verwarren met de optelling en vermenigvuldiging van gewone getallen. We gebruiken enkel dezelfde symbolen en benaming. De definities zijn :

$$f(x) + f(y) \equiv f(x \vee y)$$
$$f(x).f(y) \equiv f(x \wedge y)$$
$$[f(x)]^c = f(\sim x)$$

Deze definities maken van f een **homomorfisme** van U naar B en leiden tot de volgende rekenregels op B :

$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$	
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$	$0^c = 1$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$	$1^c = 0$
$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	

Dit kan eenvoudig gecontroleerd worden aan de hand van de volgende tabel :

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$\sim x$	$f(x)$	$f(y)$	$f(x \vee y)$	$f(x \wedge y)$	$f(\sim x)$
onw	onw	onw	onw	waar	0	0	0	0	1
onw	waar	waar	onw	waar	0	1	1	0	1
waar	onw	waar	onw	onw	1	0	1	0	0
waar	waar	waar	waar	onw	1	1	1	1	0
							$f(x) + f(y)$	$f(x) \cdot f(y)$	$[f(x)]^c$

De algebraïsche structuur $B, +, \cdot, c$ heet **twee-elementenalgebra**.

3. Rekenen in de twee-elementenalgebra

1. De bewerkingen + en · zijn **commutatief** en **inwendig** in *B* :

$\forall x, y \in B$:

$$x + y \in B$$
$$x \cdot y \in B$$
$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

2. De ‘optelling’ is **distributief** t.o.v. de ‘vermenigvuldiging’ en de ‘vermenigvuldiging’ t.o.v.van de ‘optelling’ :

$\forall x, y, z \in B$:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

3. In *B* is er een **neutraal element** voor de ‘optelling’ (0) en een neutraal element voor de ‘vermenigvuldiging’ (1) :

$\forall x \in B$:

$$x + 0 = 0 + x = x$$
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = 1$$

4. Elk element *x* in *B* bezit een **complement** met de eigenschappen :

$\forall x \in B$:

$$x + x^c = 1$$
$$x \cdot x^c = 0$$

Elke verzamelling waarop twee **binaire bewerkingen** en één **unaire bewerking** gedefinieerd zijn, die de vorige vier eigenschappen bezitten, heet een **Boole-algebra** in het vervolg **B-algebra** genoemd De twee-elementenalgebra is dus een B-algebra. Er zijn vele B-algebra’s en ze kunnen best meer dan twee elementen bezitten.

Uit de definiërende eigenschappen van een B-algebra volgen er nog een hele reeks andere. De voornaamste zijn :

$\forall x, y, z \in B$:

$$x + x = x$$
$$x \cdot x = x$$
$$x + 1 = 1$$
$$x \cdot 0 = 0$$
$$x + (x \cdot y) = x$$
$$x \cdot (x + y) = x$$
$$x + (y + z) = x + (y + z)$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
$$[x + y]^c = x^c \cdot y^c$$

$$[x \cdot y]^c = x^c + y^c$$

De eerste twee stellingen drukken uit dat elk element van de B-algebra idempotent is t.o.v. de binaire bewerkingen.

De derde en de vierde stelling leren dat het neutraal element van de ene bewerking opslorpend is voor de andere.

De vijfde en zesde eigenschappen worden soms opslorpingswetten genoemd.

De daarop volgende twee eigenschappen drukken de associativiteit uit van de beide binaire bewerkingen.

De laatste twee eigenschappen zijn bekend als de **wetten van De Morgan**.

Alle in deze paragraaf vermelde eigenschappen kunnen eenvoudig gecontroleerd worden voor de twee-elementenalgebra. Voor een B-algebra in het algemeen moeten ze bewezen worden. We controleren de wetten van De Morgan in de twee-elementenalgebra aan de hand van een waardentabel. In deze tabel blijkt duidelijk dat $[x + y]^c$ en $x^c.y^c$ steeds dezelfde waarde hebben, ongeacht de waarde van *x* en *y*. Hetzelfde geldt voor $[x.y]^c$ en $x^c + y^c$, waarmee de wetten van De Morgan bewezen zijn.

x	y	x^c	y^c	$x+y$	$x \cdot y$	$[x+y]^c$	$x^c \cdot y^c$	$[x \cdot y]^c$	$x^c + y^c$
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0

4. B-algebra's in het algemeen

Een Boole-algebra is een verzameling *B* waarop drie bewerkingen zijn gedefinieerd, twee binaire en één unaire, die 'optelling' (+), 'vermenigvuldiging' ($\cdot$) en complementering (c) genoemd worden en de volgende eigenschappen bezitten :

B1 : Beide binaire bewerkingen zijn inwendig in *B*.

$$\forall x, y \in B: \begin{array}{l} x + y \in B \\ x \cdot y \in B \end{array}$$

B2 : Beide binaire bewerkingen zijn commutatief.

$$\forall x, y \in B: \begin{array}{l} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{array}$$

B3 : Elke binaire bewerking is distributief t.o.v. de andere.

$$\forall x, y, z \in B: \begin{array}{l} x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \end{array}$$

B4 : Voor elke binaire bewerking is er een neutraal element.

$$\exists n \in B, \forall x \in B: \quad x + n = x$$
$$\exists e \in B, \forall x \in B: \quad x \cdot e = x$$

B5 : Voor elk element van de B-algebra is er een complement in de B-algebra.

$$\forall x \in B, \exists x^c \in B: \quad x + x^c = e \text{ en } x \cdot x^c = n$$

Als in de definiërende eigenschappen van een B-algebra de '+' en de '·' verwisseld worden evenals de 'n' en de 'e' , dan resulteert dat steeds in één van de andere definiërende eigenschappen. Dat betekent dat ook alle andere geldige stellingen in een B-algebra terug geldige stellingen opleveren na verwisseling van die zelfde symbolen. Deze merkwaardige eigenschap heet **dualiteit**. In de volgende paragrafen wordt zo veel mogelijk bij elke eigenschap meteen de duale eigenschap vermeld.

<u>Stelling 4.1 :</u> De elementen *n* en *e* van een B-algebra zijn uniek.

Inderdaad $n = n + n' = n' + n = n'$ en $e = e \cdot e' = e' \cdot e = e'$

<u>Stelling 4.2 :</u> In een B-algebra heeft elk element precies één complement.

Inderdaad, volgens eigenschap B5 is er minstens één complement. Stel nu dat *x* twee complementen zou hebben x_1^c en x_2^c , dan zijn die noodzakelijk gelijk. Immers

$$x_1^c = x_1^c + n = x_1^c + (x \cdot x_2^c) = (x_1^c + x) \cdot (x_1^c + x_2^c) = e \cdot (x_1^c + x_2^c) = (x_1^c + x_2^c)$$
$$= (x_2^c + x_1^c) = e \cdot (x_2^c + x_1^c) = (x_2^c + x) \cdot (x_2^c + x_1^c) = x_2^c + (x \cdot x_1^c) = x_2^c + n = x_2^c$$

<u>Stelling 4.3 :</u> De complementering is **involutief**.

Dat betekent dat voor elk element *x* van de B-algebra geldt dat $(x^c)^c = x$. Wegens B5 is *x* immers een complement van x^c en wegens stelling 4.2 is er slechts één!

<u>Stelling 4.4 :</u> De neutrale elementen zijn elkaars complement.

Er geldt immers $e + n = e$ en $n \cdot e = n$ zodat $n^c = e$ en $e^c = n$.

<u>Stelling 4.5 :</u> Elk element van de B-algebra is **idempotent** voor beide binaire bewerkingen.

Inderdaad $x + x = (x + x) \cdot e = (x + x) \cdot (x + x^c) = x + (x \cdot x^c) = x + n = x$
Wegens dualiteit geldt meteen geldt dan ook $x \cdot x = x$

<u>Stelling 4.6 :</u> In een B-algebra is het neutraal element voor de ene binaire bewerking **opslorpend** voor de andere binaire bewerking.

Inderdaad $x + e = (x + e) \cdot e = (x + e) \cdot (x + x^c) = x + (e \cdot x^c) = x + x^c = e$
Wegens dualiteit geldt meteen $x \cdot n = n$

Stelling 4.7 : Als een B-algebra meer dan één element bevat, dan zijn n en e verschillend. Anders geformuleerd, als $n = e$dan bevat de B-algebra slechts één element.

Inderdaad, stel dat $n = e$, dan geldt voor elk element x van de B-algebra
$x = n \cdot x = n = e$.
$n = e$ is immers dan zowel neutraal als opslorpend.

Stelling 4.8 : Voor willekeurige elementen x en y van een B-algebra geldt :

$$x + (x \cdot y) = x$$
$$x \cdot (x + y) = x$$

De tweede relatie volgt weer uit de eerste wegens dualiteit. Voor de eerst gaat het bewijs als volgt : $x + (x \cdot y) = x \cdot e + x \cdot y = x \cdot (e + y) = x \cdot e = x$

Stelling 4.9 : Voor willekeurige elementen x, s en t van een B-algebra geldt :

$$\text{Uit } x \cdot s = x \cdot t \text{ en } x^c \cdot s = x^c \cdot t \text{ volgt } s = t$$
$$\text{Uit } x + s = x + t \text{ en } x^c + s = x^c + t \text{ volgt } s = t$$

De tweede relatie volgt weer uit de eerste wegens dualiteit. Voor de eerst gaat het bewijs als volgt :
$s = e \cdot s = (x + x^c) \cdot s = x \cdot s + x^c \cdot s = x \cdot t + x^c \cdot t = (x + x^c) \cdot t = e \cdot t = t$

Stelling 4.10 : De beide binaire bewerkingen van een B-algebra zijn **associatief**.

Stel $s \equiv x + (y + z)$ en $t \equiv (x + y) + z$ dan geldt :

$x \cdot s = x \cdot [x + (y + z)] = x$
$x \cdot t = x \cdot [(x + y) + z] = x \cdot (x + y) + x \cdot z = x + x \cdot z = x$
$x^c \cdot s = x^c \cdot [x + (y + z)] = x^c \cdot x + x^c \cdot (y + z) = n + x^c \cdot (y + z) = x^c \cdot (y + z)$
$x^c \cdot t = x^c \cdot [(x + y) + z] = x^c \cdot (x + y) + x^c \cdot z$
$\quad = x^c \cdot x + x^c \cdot y + x^c \cdot z = n + x^c \cdot (y + z) = x^c \cdot (y + z)$

Dus $x \cdot s = x \cdot t$ en $x^c \cdot s = x^c \cdot t$ zodat $s = t$
De optelling is dus associatief, en wegens dualiteit meteen ook de vermenigvuldiging.

Stelling 4.11 : Voor willekeurige elementen van een B-algebra gelden de wetten van De Morgan :

$$(x + y)^c = x^c \cdot y^c$$
$$(x \cdot y)^c = x^c + y^c$$

De tweede relatie is weer de duale van de eerste. De eerste wordt bewezen door te tonen dat $x + y$ het complement id van $x^c \cdot y^c$.

$$(x + y) + x^c \cdot y^c = [(x + y) + x^c] \cdot [(x + y) + y^c] = (e + y) \cdot (e + x) = e \cdot e = e$$
$$(x + y) \cdot x^c \cdot y^c = (x \cdot x^c \cdot y^c) + (y \cdot x^c \cdot y^c) = n \cdot y^c + n \cdot x^c = n + n = n$$

Voorbeeld 4.1 :

Als $\mathfrak{D}(V)$ de delenverzameling is van een willekeurige verzameling *V*, dan kunnen op $\mathfrak{D}(V)$ de gekende bewerkingen 'unie' ($\cup$) en 'intersectie' ($\cap$) gedefinieerd worden. Het complement van een willekeurig element $A \in \mathfrak{D}(V)$ wordt dan gedefinieerd door $A^c = V \setminus A$. A^c is dus de verzameling van de elementen die wel tot *V* maar niet tot *A* behoren.

De neutrale elementen zijn de lege verzameling $\emptyset$ en de verzameling *V* zelf. Dat de *B*-eigenschappen vervuld zijn is elementair en het bewijzen ervan wordt aan de lezer overgelaten.

$\mathfrak{D}(V),+,\cdot,^c$ is dus een B-algebra.

Voorbeeld 4.2 :

De verzameling *del30* = {1,2,3,5,6,10,15,30} is de verzameling van alle delers van 30. Deze wordt een B-algebra als voor de 'optelling', de 'vermenigvuldiging' en de 'complementering' bijvoorbeeld de volgende definities worden aanvaard :

$$x + y \equiv kgv(x, y)$$
$$x \cdot y \equiv ggd(x, y)$$
$$x^c \equiv 30/x$$

Hierin zijn *x* en *y* steeds willekeurige elementen van *del 30*. De *B*-eigenschappen zijn weer alle voldaan, wat door eenvoudige controle kan aangetoond worden. Het neutraal element voor de 'optelling' is *n* = 1, dat voor de 'vermenigvuldiging' is *e* = 30.

Met dezelfde definities voor de verschillende bewerkingen zijn ook de volgende verzamelingen B-algebra's. Elk van hen is een **deelalgebra** van de vorige :

$$del10 = \{1,2,5,10\}$$
$$del2 = \{1,2\}$$
$$del1 = \{1\}$$

Dit voorbeeld kan veralgemeend worden tot de verzameling van alle delers van om het even welk natuurlijk getal *del n*.

Voorbeeld 4.3 :

Beschouw het half open interval *I* = [0,1[van alle reële getallen tussen nul en één, nul inbegrepen, en al diens half open deelintervallen [α,β[. Er geldt dus steeds 0 ≤ α ≤ β ≤ 1. Definieer *B* als de verzameling van alle eindige unies van zulke deelintervallen.. Voor willekeurige elementen *x* en *y* uit *B* definieren we :

$$x + y \equiv x \cup y$$
$$x \cdot y \equiv x \cap y$$
$$x^c \equiv I \setminus x$$

Met deze bewerkingen wordt *B* weer een B-algebra ook de **intervalsalgebra** genoemd.

5. Geordende B-algebra's

Dikwijls wordt op een B-algebra een **orde** gedefiniëerd door : $x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y = x$

Deze relatie is inderdaad een orde :

reflexiviteit :	$x \leq x$ wegens $x \cdot x = x$
anti-symmetrie :	Uit $x \leq y$ én $y \leq x$ volgt $x \cdot y = x$ én $y \cdot x = y$. Wegens commutativiteit : $x = y$
transitiviteit :	Uit $x \leq y$ én $y \leq z$ volgt $x \cdot y = x$ én $y \cdot z = y$. Dus $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y = x$ zodat $x \leq z$

Een element heet het **infimum** van twee elementen *x* en *y* en wordt genoteerd als $inf(x, y)$, als het voldoet aan twee voorwaarden :

1. het gaat in de orde vooraf aan *x* en *y*
2. elk ander element dat ook aan de eerste voorwaarde voldoet gaat vooraf aan het infimum.

Een element heet het **supremum** van twee elementen *x* en *y* en wordt genoteerd als $sup(x, y)$, als het voldoet aan twee voorwaarden :

1. in de orde volgt het op *x* en *y*
2. elk ander element dat ook aan de eerste voorwaarde voldoet volgt op het supremum.

Voorbeeld 5.1 :

Als $\mathfrak{D}(V)$ de B-algebra is uit voorbeeld 4.1, dan definieert de inclusierelatie ⊆ een orde op deze B-algebra : $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$. Het supremum en het infimum van *A* en *B* zijn :

$$sup(A, B) = A \cup B$$
$$inf(A, B) = A \cap B$$

Op deze wijze word $\mathfrak{D}(V)$,≤ een **tralie**. Deze tralie bezit een 'eerste' element $\emptyset$, het gaat *elk* ander element van de verzameling vooraf. Er is ook een 'laatste' element *V*, *elk* ander element van de verzameling gaat eraan vooraf. Voor elk element *A* van $\mathfrak{D}(V)$, ≤ geldt $\emptyset \leq A \leq V$

Voorbeeld 5.2 :

De verzameling $del30$, wordt van een orde voorzien door de klassieke '… is niet groter dan …" relatie : $x \leq y$ is equivalent met $kgv(x, y) = x$. Het supremum en het infimum van *x* en *y* zijn :

$$sup(x, y) = kgv(x, y)$$
$$inf(x, y) = ggd(x, y)$$

Op deze wijze word $del30, \leq$ een **tralie**. Deze tralie bezit een 'eerste' element 1, het gaat *elk* ander element van de verzameling vooraf. Er is ook een 'laatste' element 30, elk ander element van de verzameling gaat eraan vooraf. Voor elk element x van $del30, \leq$ geldt $1 \leq x \leq 30$

Voorbeeld 5.3 :

Neem voor B de verzameling van alle oneindige rijen waarvan de termen enkel de waarde 0 of 1 kunnen hebben. Notatie : $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots)$. Een voorbeeld van een dergelijke rij is $(1,0,0,1,0,1,0, \dots)$.

Op B wordt een orderelatie gedefinieerd door te eisen dat $x \leq y$ enkel en alleen als elk element van x kleiner of gelijk is aan het overeenkomstig element van y (element op dezelfde plaats) :

$$x \leq y \text{ asa voor elk natuurlijk getal } i \text{ geldt : } x_i \leq y_i$$

Zo geldt bijvoorbeeld $(0,1,1,0,1,0,0, \dots) \leq (1,1,1,0,1,1,0, \dots)$

Deze orde-relatie is geen totale orde ! Voor elk tweetal elementen van B bestaat het supremum en het infimum. Het supremum ontstaat door op elke plaats een 1 te plaatsen, zodra bij x of y op die plaats een 1 staat. Het infimum ontstaat door op elke plaats een 0 te plaatsen, zodra bij x of y op die plaats een 0 staat.

Met $x = (0,1,0,1,0,1, \dots)$ en $y = (0,0,0,1,1,1, \dots)$ geldt bijvoorbeeld :

$$sup(x, y) = (0,1,0,1,1,1, \cdots)$$
$$inf(x, y) = (0,0,0,1,0,1, \cdots)$$

Op deze wijze wordt $B, \leq$ een **tralie**. Deze tralie bezit een 'eerste' element $0 = (0,0,0,0, \dots)$, het gaat *elk* ander element van de verzameling vooraf. Er is ook een 'laatste' element $1 = (1,1,1,1, \dots)$, *elk* ander element van de verzameling gaat eraan vooraf. Een willekeurige tralie bezit niet noodzakelijk een 'eerste' en/of 'laatste' element,

Het is nu mogelijk in B een complementering te definiëren. Het complement van een rij ontstaat door in die rij elke 0 door 1 en elke 1 door 0 te vervangen.

Definieert men tenslotte

$$x + y \equiv sup(x, y)$$
$$x \cdot y \equiv inf(x, y)$$

dan wordt B een B-algebra !

Stelling 5.1 : In elke B-algebra met hoger gedefinieerde orde geldt dat

$$x \cdot y = x \Leftrightarrow x + y = y$$

Inderdaad, uit $x \cdot y = y$
volgt $x + y = x \cdot y + y = (x + e) \cdot y = e \cdot y = y$

en omgekeerd volgt uit $x + y = y$
dat $x \cdot y = x \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x + x \cdot y = x + x = x$

Stelling 5.2 : In elke B-algebra met hoger gedefinieerde orde geldt $x \leq y \Leftrightarrow y^c \leq x^c$

Inderdaad : $x \leq y \Leftrightarrow xy = x \Leftrightarrow (x \cdot y)^c = x^c \Leftrightarrow x^c + y^c = x^c \Leftrightarrow y^c \leq x^c$

Stelling 5.3 : Voor alle elementen x van een B-algebra met hoger gedefinieerde orde geldt $n \leq x \leq e$. Elke B-algebra met de hoger gedefinieerde orde heeft dus een eerste element en een laatste element.

Inderdaad : $n \cdot x = n$ zodat $n \leq x$. Eveneens $e \cdot x = x$ zodat $x \leq e$

Stelling 5.4 : Voor alle elementen x,y van een B-algebra met hoger gedefinieerde orde geldt :

$$x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y^c = n$$

Inderdaad, $x \leq y \Rightarrow x \cdot y = x \Rightarrow x \cdot y^c = (x \cdot y) \cdot y^c = x \cdot (y \cdot y^c) = x \cdot n = n$
$x \cdot y^c = n \Rightarrow x \cdot y = x \cdot y + x \cdot y^c = x \cdot (y + y^c) = x \cdot e = x \Rightarrow x \leq y$

Stelling 5.5 : Voor alle elementen x,y van een B-algebra met hoger gedefinieerde orde geldt :

$$x \leq y \Leftrightarrow x^c + y = e$$

Inderdaad, $x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y^c = n \Leftrightarrow (x \cdot y^c)^c = n^c \Leftrightarrow x^c + y = e$

Stelling 5.6 : Voor alle elementen x,y van een B-algebra met hoger gedefinieerde orde geldt :

$$x + y = sup(x,y) \quad \text{en} \quad x \cdot y = inf(x,y)$$

Inderdaad, wegens $x \cdot (x + y) = x$ geldt $x \leq x + y$, en wegens $y \cdot (x + y) = y$ geldt $y \leq x + y$. Daardoor is $x + y$ dus zeker een bovengrens van x en y.
Elke andere bovengrens t is bovendien groter, want uit $x \leq t$ en $y \leq t$ volgt $x \cdot t = x$ en $y \cdot t = y$ zodat $(x + y) \cdot t = x \cdot t + y \cdot t = x + y$, en dus $x + y \leq t$.

Met de hier gedefinieerde orde wordt elke B-algebra dus een **tralie**. Een tralie is een geordende verzameling waarin voor elk tweetal elementen in die verzameling een **supremum** en een **infimum** bestaat.

Een element $a \neq n$ van een met zulke orde voorziene B-algebra heet **atoom** als het onmiddellijk op n volgt, d.w.z. als

$$\forall x \in B: x \leq a \Longrightarrow (x = n \vee x = a)$$

De B-algebra heet atomistisch als aan elk element verschillend van n minstens één atoom voorafgaat. De verzameling van alle atomen die een gegeven element x voorafgaan wordt voorgesteld door $A(x)$. Een B-algebra is dus atomistisch asa :

$$\forall x \in B \setminus \{n\}: A(x) \neq \emptyset$$

Voorbeeld 5.1 :

De B-algebra $\mathfrak{D}(V)$ met de orde $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ is atomistisch. De atomen zijn de singletons. De verzamelingenalgebra $\mathfrak{D}(V)$ bevat dus evenveel atomen als er elementen zijn in V.

Voorbeeld 5.2 :

Een orde op de verzameling $del30$ wordt bepaald door de klassieke '… is niet groter dan …" relatie : als $x \leq y$ dan geldt $kgv(x, y) = x$. De atomen in deze B-algebra zijn de getallen die geen andere delers hebben dan 1 en zichzelf, de priemgetallen dus : 2,3 en 5.

Stelling 5.7 : Elke eindige B-algebra is atomistisch.

Voor elk element x van de B-algebra geldt $n \leq x$. Er zijn dus slechts twee mogelijkheden. Ofwel is x zelf een atoom ofwel is er minstens nog een element y verschillend van x dat volgt op n maar voorafgaat aan x. Ofwel is dan y een atoom dat vooraf gaat aan x, ofwel is er weer een element z dat volgt op n maar voorafgaat aan y. Dit procédé moet eindigen bij een atoom vermits er slechts een eindig aantal elementen in de algebra zijn.

Stelling 5.8 : In een B-algebra geldt voor elk atoom a en elk willekeurig element x :

ofwel $a \leq x$ ofwel $a \leq x^c$

m.a.w. $a \in A(x)$ ofwel $a \in A(x^c)$

Wegens $a \cdot x = inf(a, x)$ geldt $a \cdot x \leq a$ en vermits a een atoom is geldt ofwel $a \cdot x = a$, ofwel $a \cdot x = n$. Is $a \cdot x = a$ dan $a \leq x$. Is $a \cdot x = n$ dan $a \leq x^c$.

Voorbeeld 5.4:

In de verzameling $del36$ is a = 3 een atoom. Kiezen we x = 6, dan is 3 een deler van 6 en dus $a \leq x$. Kiezen we x = 2 dan is x^c = 36/2 = 18 wat een veelvoud is van 3, zodat

$$a \leq x^c$$

Stelling 5.9 : In een atomistische B-algebra geldt : $x = y \Leftrightarrow A(x) = A(y)$

Het bewijs voor $\Rightarrow$ is evident. Voor de andere implicatie veronderstellen we $A(x) = A(y)$ en tonen aan dat $x \neq y$ dan ongerijmd is. Als $x \neq y$ dan is ofwel $x \leq y$ ofwel $y \leq x$.

Voor het bewijs in de andere zin, stel $y \leq x$, dan geldt $x \cdot y^c \neq n$ (stelling 4 van deze paragraaf)

Dan $A(x \cdot y^c) \neq \emptyset$ (omdat de algebra atomistisch is)
dan bestaat er een atoom a met $a \leq x \cdot y^c$ (definitie)
dan geldt ook $a \leq x$ en $a \leq y^c$ omdat $x \cdot y^c = inf(x, y)$
dan geldt ook $a \in A(x)$ en $a \in A(y^c)$ (definitie)
dan geldt ook $a \in A(x)$ en $a \notin A(y)$
dan volgt $A(x) \neq A(y)$ in strijd met de veronderstelling.

Stelling 5.10 : In een atomistische B-algebra geldt voor elk element x : $A(x^c) = A(e) \setminus A(x)$

Merk op : $A(e)$ is de verzameling van alle atomen in de algebra.
Verder

$$\begin{aligned} & a \in A(x^c) \\ \Leftrightarrow\ & a \notin A(x) \\ \Leftrightarrow\ & a \in A(e) \setminus A(x) \end{aligned}$$

waarmee de stelling bewezen is.

Voorbeeld 5.5:

Voor $3 \in del42$ geldt $3^c = 14 \in del42$
$A(e) = A(42) = \{2,3,7\}$
$A(3) = \{3\}$
$A(3^c) = A(14) = \{2,7\} = A(e) \setminus A(3)$

Stelling 5.11 : In een atomistische B-algebra geldt voor alle x en y : $A(x \cdot y) = A(x) \cap A(y)$

$$\begin{aligned} & a \in A(x \cdot y) & & \\ \Leftrightarrow\ & a \leq x \cdot y & & \text{bij definitie} \\ \Leftrightarrow\ & a \leq x \text{ en } a \leq y & & \text{omdat } x \cdot y = inf(x,y) \\ \Leftrightarrow\ & a \in A(x) \text{ en } A(y) & & \text{bij definitie} \\ \Leftrightarrow\ & a \in A(x) \cap A(y) & & \end{aligned}$$

Voorbeeld 5.6:

Neem in $del42$ $x = 14$ en $y = 21$,dan is $x \cdot y = 7$
$A(x) = \{2,7\}$
$A(y) = \{3,7\}$
$A(x \cdot y) = \{7\} = A(x) \cap A(y)$

Stelling 5.12 : In een atomistische B-algebra geldt voor alle x en y : $A(x + y) = A(x) \cup A(y)$

Als a een atoom is in B,
dan geldt $a \in A(x) \cup A(y)$
daaruit volgt $a \leq x$ of $a \leq y$ wegens definitie
daaruit volgt $a \leq x + y$ omdat $x + y = sup(x,y)$
daaruit volgt $a \in A(x + y)$.
Waarmee is aangetoond dat $A(x) \cup A(y) \subseteq A(x + y)$

Als $a \in A(x + y)$
dan geldt $a \leq x + y$ en dus $a \cdot (x + y) = a$
Maar dan geldt ook $a \leq x$ of $a \leq y$ en volgens stelling 5.10 is het dan onmogelijk dat tegelijkertijd $a \leq x^c$ en $a \leq y^c$ vermits dat zou betekenen dat

$$a \cdot x = a \cdot y = n \Rightarrow a \cdot x + a \cdot y = n \Rightarrow a \cdot (x + y) = n$$

waaruit $a = n$ wat niet kan (n is geen atoom)
Daaruit volgt dat a element is van $A(x)$ of $A(y)$
of $a \in A(x) \cup A(y)$ waaruit of $A(x + y) \subseteq A(x) \cup A(y)$

Voorbeeld 5.7:

In $del42$ kiezen we $x = 14$ en $y = 21$, dan is $x + y = 42$.
$A(x) = \{2,7\}$
$A(y) = \{3,7\}$
$A(x + y) = \{2,3,7\} = A(x) \cup A(y)$

Stelling 5.13 : Voor atomen $a_1, a_2, \dots, a_n$ van een atomistische B-algebra geldt :

$$A(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

Voor elk individueel atoom geldt $A(a_i) = \{a_i\}$
Toepassing van stelling 5.12 geeft :

$$\begin{aligned} A(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) &= A(a_1) \cup A(a_2) \cup \cdots \cup A(a_n) \\ &= \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \\ &= \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \end{aligned}$$

Voorbeeld 5.8:

In $del42$ zijn de atomen 2, 3 en 7.
Dan is $2 + 7 = kgv(2,7)$ = 14.
$A(2 + 7) = A(14) = \{2,7\}$

6. Isomorfe B-algebra's

In paragraaf 2 werd reeds een homomorfisme ingevoerd van de verzameling van alle oordelen *U* naar de twee-elementenalgebra *B*. Twee B-algebra's *V* en *W* heten homomorf als er een afbeelding f bestaat van *V* naar *W* met de eigenschappen

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &\equiv f(x + y) \\ f(x) \cdot f(y) &\equiv f(x \cdot y) \\ [f(x)]^c &\equiv f(x^c) \end{aligned}$$

Let wel, de bewerkingen in de linkerleden zijn die gedefiniëerd op *W*, deze van de rechterleden zijn gedefinieerd op *V*. De bewerkingen op *V* en *W* kunnen erg van elkaar verschillen ook al worden ze met dezelfde symbolen voorgesteld.

Is de afbeelding f bovendien een bijectie, dan heten *V* en *W* isomorfe B-algebra's.

Een isomorfisme legt dus een één-éénduidig verband tussen beide algebra's en respecteert de bewerkingen van die B-algebra's : het beeld van een som wordt afgebeeld op de som van de overeenkomstige beelden, het beeld van een product wordt afgebeeld op het product van de overeenkomstige beelden, het beeld van een complement wordt afgebeeld op het complement van het overeenkomstige beeld.

Een isomorfisme respecteert bovendien de orde : als in *V* geldt dat $x \le y$ dan geldt in *W* dat $f(x) \le f(y)$. Inderdaad, $x \le y$ betekent dat $x \cdot y = x$, waaruit $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = f(x)$ en dus $f(x) \le f(y)$.

Hoewel deze algebra's inhoudelijk dus zeer kunnen verschillen, zijn ze algebraïsch niet meer van elkaar te onderscheiden. Het zijn a.h.w. verschillende representaties van 'dezelfde' B-algebra.

Voorbeeld : 6.1

De twee-elementenalgebra is isomorf met de algebra van het singleton.

Stel B = {0,1} en $\mathfrak{D}(\{a\})$, dan zijn de bewerkingen op beide verzamelingen als volgt gedefiniëerd:

B = {0,1}

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$0^c = 1$$
$$1^c = 0$$

$\mathfrak{D}(\{a\})$ $=\{\emptyset,\{a\}\}$

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$

$$\emptyset^c = \{a\}$$
$$\{a\}^c = \emptyset$$

Het is meteen duidelijk dat de afbeelding

$$f : \mathfrak{D}(\{a\}) \rightarrow B$$

gedefiniëerd door

$$f(\emptyset) = 0$$
$$f(\{a\}) = 1$$

een isomorfisme is. Er is dus geen algebraïsch verschil tussen beide algebra's. Het is bovendien meteen duidelijk dat er maar één B-algebra is met twee elementen ; de twee-elementenalgebra.

Voorbeeld 6.2 :

De B-algebra B van de oneindige rijen van voorbeeld 4 is isomorf met de delenverzameling $\mathfrak{D}(N)$ van de verzameling N van de natuurlijke getallen. Met elke rij $x \in B$ wordt een deelverzameling $X \subseteq N$ geassocieerd door :

$$i \in X \Leftrightarrow x_i = 1$$

Zo komt met X = {2,4,5} de rij $x = (0,0,1,0,1,1,0,0,0,\cdots)$ overeen.

De functie

$$f : \mathfrak{D}(\{a\}) \rightarrow B : X \rightarrow x$$

is een bijectie en met

$$f(X \cup Y) = x + y$$
$$f(X \cap Y) = x \cdot y$$
$$f(X^c) = x^c$$

een isomorfisme ($X^c = N \setminus X$). Beide verzamelingen B en $\mathfrak{D}(N)$ hebben dus dezelfde algebraïsche structuur.

Stelling 6.1 : Elk isomorfisme van B-algebra's behoudt de orde.

Stel $x \leq y$ in de B-algebra, dan geldt $x{\cdot}y = x$,
zodat $f(x{\cdot}y) = f(x){\cdot}f(y) = f(x)$ en dus $f(x) \leq f(y)$

Stelling 6.2 : Als f een isomorfisme is tussen B-algebra's dan zijn $f(n)$ en $f(e)$ de neutrale elementen van de doelalgebra en tevens eerste en laatste element.

Wegens definitie van een isomorfisme :
$f(n) + f(y) = f(n + y) = f(y)$
$f(n){\cdot}f(y) = f(n{\cdot}y) = f(y)$
Vermits voor elk element van de bronalgebra $n \leq x \leq e$ en vermits f de orde behoudt geldt voor elk element van de doelalgebra $f(x)$ dat $f(n) \leq f(x) \leq f(e)$.

Stelling 6.3 : Elke eindige B-algebra B is isomorf met de verzamelingenalgebra van zijn atomen.

Deze algebra is atomistisch en $A = A(e)$ is de verzameling van zijn atomen.
Definieer de volgende afbeelding

$$f : B \to \mathfrak{D}(A) : x \to A(x)$$

Wegens stellingen 5.9 en 5.13 is f een bijectie
Wegens stellingen 5.10, 5.11 en 5.12 geldt :

$$f(x + y) = A(x + y) = A(x) \cup A(y) = f(x) \cup f(y)$$
$$f(x{\cdot}y) = A(x{\cdot}y) = A(x) \cap A(y) = f(x) \cap f(y)$$
$$f(x^c) = A(x^c) = A \setminus A(x) = A \setminus f(x) = [f(x)]^c$$

Stelling 6.4 : Een eindige algebra B met n atomen bevat 2^n elementen.

Als n het aantal atomen is van B dan bevat $\mathfrak{D}(A)$ juist 2^n elementen. Bovendien zijn B en $\mathfrak{D}(A)$ isomorf.

Voorbeeld 6.3 :

De B-algebra $del42$ heeft drie atomen nl. 2, 3, en 7. B bevat dus $2^3 = 8$ elementen.
B is isomorf met de verzamelingenalgebra van elke willekeurige verzameling met drie elementen $\{a,b,c\}$.

7. De bewerkingen van Peirce en Sheffer

De bewerkingen van Peirce en Sheffer worden gedefinieerd door :

$$x \oplus y \equiv [x+y]^c$$
$$x \otimes y \equiv [x \cdot y]^c$$

Het is nu mogelijk alle *B*-bewerkingen uit te drukken d.m.v. één van deze bewerkingen. De B-algebra wordt dus door die ene bewerking reeds volledig bepaald.

Er geldt immers :

$$x^c = x \oplus x$$
$$x+y = (x \oplus y) \oplus (x \oplus y)$$
$$x \cdot y = (x \oplus x) \oplus (y \oplus y)$$

evenals

$$x^c = x \otimes x$$
$$x+y = (x \otimes x) \otimes (y \otimes y)$$
$$x \cdot y = (x \otimes y) \otimes (x \otimes y)$$

ongeacht de keuze van *x* en *y* in de B-algebra. Andere merkwaardige relaties zijn :

$$x+y+z = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z)$$
$$x \cdot y \cdot z = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

Al deze eigenschappen kunnen eenvoudig bewezen worden door in de rechterleden telkens de definities te gebruiken voor de nieuwe bewerkingen. Het bewijs voor de laatste eigenschap gaat als volgt :

$$(x \otimes y) \oplus (x \otimes z) = [x \cdot y]^c \oplus [x \cdot z]^c = [[x \cdot y]^c + [x \cdot z]^c]^c = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z) = x \cdot y \cdot z$$

8. B-polynomen en B-functies

Alle volgende definities en eigenschappen kunnen steeds ‘vertaald’ worden in een duale definitie of eigenschap. Dit wordt niet langer expliciet vermeld. Verder wordt de terminologie en de notatie overgenomen, die gebruikelijk is voor reële getallen. De constanten worden voorgesteld door a, b, c, … , de veranderlijken met de letters *x*, *y*, *z*, … en het vermenigvuldigingsteken ($\cdot$) wordt niet langer geschreven : $x \cdot y \equiv xy$.

Elke uitdrukking bekomen door op constanten en veranderlijken van de B-algebra de *B*-bewerkingen uit te voeren heet een B-polynoom. Voorbeeld :

$$(x+y)[y+z^c]^c + axy^c$$

Substitutie van waarden uit de B-algebra voor de veranderlijke van een B-polynoom levert terug een waarde uit de B-algebra. Zo ontstaan *B*-functies. Verschillende B-polynomen kunnen het voorschrift zijn van dezelfde *B*-functie. Zo definiëren $f(x,y) = x + yx^c$ en $g(x,y) = x + y$ dezelfde *B*-functie. Voor dezelfde keuze van *x* en *y* hebben ze immers steeds dezelfde waarde.

Een B-polynoom in n veranderlijken, $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$, heet minimaal als hij het product is van n factoren waarvan de i^{de} factor x_i of x_i^c is ($i = 1,\ldots,n$).

Voorbeelden met twee veranderlijken :

$$xy \quad x^c y \quad xy^c \quad x^c y^c$$

Voorbeelden met drie veranderlijken :

$$xyz \quad x^c yz \quad xy^c z \quad xyz^c \quad xy^c z^c \quad x^c yz^c \quad x^c y^c z \quad x^c y^c z^c$$

Het is meteen duidelijk dat er precies 2^n minimale B-polynomen zijn. Voor elk van de n factoren zijn er immers telkens twee mogelijkheden.

Een B-polynoom is in normaalvorm als hij een lineaire combinatie is van minimale B-polynomen. Elke B-polynoom kan in normaalvorm kan gebracht worden. Het volgende voorbeeld toont aan hoe dat gebeurt.

<u>Voorbeeld 8.1:</u> $f(x,y,z) = (x+y)(y+z^c)^c + axy^c$

a) Als een complementering buiten haakjes optreedt, wordt die binnen de haakjes gebracht door middel van De Morgan : $f(x,y,z) = (x+y)y^c z + axy^c$
b) Door middel van distributiviteit worden producten binnen de haakjes en sommen buiten de haakjes gebracht : $f(x,y,z) = xy^c z + yy^c z + axy^c$
c) Komt eenzelfde letter tweemaal voor, dan wordt er vereenvoudigd met $xx = x$, $nx = n$ of $xx^c = n$: $f(x,y,z) = xy^c z + axy^c$
d) Komt in een product een letter z niet voor, dan voeren we die letter in door dat product met $z + z^c$ te vermenigvuldigen en de ontstane haakjes uit te werken zoals in b: $f(x,y,z) = xy^c z + axy^c(z + z^c) = xy^c z + axy^c z + axy^c z^c$
e) Treedt eenzelfde minimale formule tweemaal op, dan biedt de distributiviteit een uitweg : $f(x,y,z) = xy^c z + axy^c z + axy^c z^c = (e+a)xy^c z + axy^c z^c = xy^c z + axy^c z^c$

De opgegeven B-polynoom is nu in normaalvorm !

Een B-polynoom is volledig bepaald door zijn 2^n waarden voor $x_i = n$ of e.

De normaalvorm voor twee veranderlijken bijvoorbeeld is :

$$f(x,y) = axy + bx^c y + cxy^c + dx^c y^c$$

met

$$f(e,e) = a \quad f(n,e) = b \quad f(e,n) = c \quad f(n,n) = d$$

De vier coëfficienten a, b, c en d zijn hiermee dus volledig bepaald.

9. B-polynomen in de twee-elementenalgebra

In de twee-elementenalgebra kunnen de coefficienten en de veranderlijken enkel de waarden 0 en 1 aannemen. Vermits er 2^n minimale *B*-eentermen zijn in *n* veranderlijken, zijn er 2^{2^c} *B*-functies in de twee-elementenalgebra. Er zijn dus 16 functies in twee veranderlijken. In normaalvorm hebben ze alle de gedaante :

$$f(1,1)xy + f(0,1)x^c y + f(1,0)xy^c + f(0,0)x^c y^c$$

De coefficienten nemen daarbij enkele de waarden 0 en 1 aan.

Voorbeelden :

a) Als $f(1,1) = f(0,1) = 1$ en $f(1,0) = f(0,0) = 0$ dan is de bijhorende B-polynoom :

$$xy + x^c y = (x + x^c)y = y$$

b) Als $f(1,1) = f(0,1) = 0$ en $f(1,0) = f(0,0) = 1$ dan is de bijhorende B-polynoom :

$$xy^c + x^c y^c = (x + x^c)y^c = y^c$$

De volgende tabel bevat alle B-functies in twee veranderlijken van de twee-elementenalgebra. De volgorde van de B-functies is zó dat :

$$[f_i(x,y)]^c = f_{17-i}(x,y)$$

nr	$f(1,1)$	$f(0,1)$	$f(1,0)$	$f(0,0)$	$f(x,y)$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	$x^c y^c$
3	0	0	1	0	xy^c
4	0	1	0	0	$x^c y$
5	1	0	0	0	xy
6	0	0	1	1	y^c
7	0	1	0	1	x^c
8	0	1	1	0	$x^c y + xy^c$
9	1	0	0	1	$xy + x^c y^c$
10	1	0	1	0	x
11	1	1	0	0	y
12	0	1	1	1	$x^c + y^c$
13	1	0	1	1	$x + y^c$
14	1	1	0	1	$x^c + y$
15	1	1	1	0	$x + y$
16	1	1	1	1	1

Praktisch voorbeeld :

Een dubbelrichtingsschakelaar bij gang- en huiskamerverlichting is een stel van twee schakelaars die het licht doven als beide schakelaars open of beide gesloten zijn, terwijl het licht brandt in de andere gevallen. Daarvoor wordt gezocht naar een B-functie

$$f(x, y) = axy + bx^c y + cxy^c + dx^c y^c$$

waarvoor

$$f(0,0) = f(1,1) = 0$$
$$f(0,1) = f(1,0) = 1$$

Zodat $a = d = 0$ en $b = c = 1$

$$f(x, y) = bx^c y + cxy^c$$

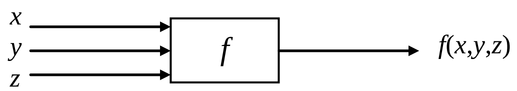
10. Logische 'schakelingen'

Naast de toepassingen van de zuivere wiskunde en de logica vinden we de twee-elementenalgebra terug in vele gebieden van de wetenschap en de technologie. Het werd zelfs gebruikelijk de B-functies van de twee-elementenalgebra voor te stellen op een wijze die ontleend is aan de elektronica, en waarvoor de naam **logische schakeling** is ontstaan.

Een logische schakeling is dus bepaald door een voorschrift van de gedaante

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

De veranderlijken $x_1, x_2, \cdots, x_n$ kunnen slechts de waarden 0 en 1 aannemen en heten de ingangsveranderlijken. De functiewaarde $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ kan eveneens enkel de waarden 0 en 1 aannemen en heet de uitgangsveranderlijke. De 'logische schakeling' wordt dan als volgt voorgesteld :



Vermits alle B-polynomen bekomen worden door met de *B*-veranderlijken *B*-bewerkingen uit te voeren, is het nuttig de meest eenvoudige logische schakelingen, of **poorten**, die met die bewerkingen overeenkomen, te bestuderen.

OF-poorten (OR)

Een OF-poort wordt beschreven door de B-polynoom :

$$OF(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

De uitgangsveranderlijke heeft de waarde 1 als minstens één van de ingangsveranderlijken de waarde 1 heeft. In alle andere gevallen heeft ze de waarde 0. In de elektronica laat de OF-poort stroom door zodra zij van één of meer van de binnenkomende geleiders stroom ontvangt. Een OF-poort heeft minstens twee ingangen !

EN-poorten (AND)

Een EN-poort wordt beschreven door de B-polynoom :

$$EN(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

De uitgangsveranderlijke heeft de waarde 1 als alle ingangsveranderlijken eveneens de waarde 1 hebben. In alle andere gevallen heeft ze de waarde 0. In de elektronica laat de EN-poort slechts stroom door als zij van alle binnenkomende geleiders stroom ontvangt. Een EN-poort heeft minstens twee ingangen !

NIET-poorten (NOT)

Een NIET-poort wordt beschreven door de B-polynoom :

$$NIET(x) = x^c$$

De uitgangsveranderlijke heeft de waarde 1 als de enige ingangsveranderlijke de waarde 0 heeft en omgekeerd. In de elektronica geeft de NIET-poort stroom door als zij zelf geen stroom ontvangt en omgekeerd !

Vermits elke B-polynoom bekomen kan worden enkel door de B-bewerkingen uit te voeren, kan elke logische schakeling samengesteld worden met OF-, EN- en NIET-poorten.

XOF-poorten (XOR)

Een XOF-poort (eXclusieve OF) wordt beschreven door de B-polynoom :

$$XOF(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^c x_2 \cdots x_n + x_1 x_2^c \cdots x_n + \cdots + x_1 x_2 \cdots x_n^c$$

De uitgangsveranderlijke heeft de waarde 1 als precies één van de ingangsveranderlijken de waarde 1 heeft. In alle andere gevallen is ze 0. In de elektronica geeft de XOF-poort enkel en alleen stroom door als zij zelf stroom ontvangt van precies één inputgeleider!

Voorbeelden :

$$\begin{aligned} xy + zu &= OF[EN(x,y), EN(z,u)] \\ x^c y^c (y+z) &= EN\{EN[NIET(x), NIET(y)], OF[y,z]\} \\ XOF(x,y,z) &= OF\{EN[NIET(x), y, z], EN[x, NIET(y), z], EN[x, y, NIET(y)]\} \end{aligned}$$

NOF-poorten (NOR)

Een NOF-poort wordt beschreven door de B-polynoom :

$$NOF(x_1, x_2, \cdots, x_n) = NIET[OF(x_1, x_2, \cdots, x_n)] = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^c = x_1^c x_2^c \cdots x_n^c$$

Dit is de ‘elektronische’ voorstelling van de bewerking van Peirce. Op grond van de hoger aangetoonde eigenschappen van deze bewerking, kunnen alle schakelingen opgebouwd worden met uitsluitend NOF-poorten :

$$\begin{aligned} &NIET(x) = NOF(x,x) \\ &OF(x,y) = NOF[NOF(x,y), NOF(x,y)] \\ &EN(x,y) = NOF[NOF(x,x), NOF(y,y)] \end{aligned}$$

NEN-poorten (NAND)

Een NEN-poort wordt beschreven door de B-polynoom :

$$NEN(x_1, x_2, \cdots, x_n) = NIET[x_1, x_2, \cdots, x_n] = (x_1 x_2 \cdots x_n)^c = x_1^c + x_2^c + \cdots + x_n^c$$

Dit is de 'elektronische' voorstelling van de bewerking van Sheffer. Op grond van de hoger aangetoonde eigenschappen van deze bewerking, kunnen alle schakelingen opgebouwd worden met uitsluitend NEN-poorten :

$$\begin{aligned} &NIET(x) = NEN(x, x) \\ &OF(x, y) = NEN[NEN(x, x), NEN(y, y)] \\ &EN(x, y) = NEN[NEN(x, y), NEN(x, y)] \end{aligned}$$

11. Het vereenvoudigen van logische 'schakelingen'

Net zoals B-polynomen soms kunnen vereenvoudigd worden, zo kunnen ook logische schakelingen soms vereenvoudigd worden. De uiteindelijke 'werking' van die schakelingen verandert daardoor niet. Dezelfde waarden van de ingangsveranderlijken leveren dezelfde uitgangswaarde, ongeacht of de oorspronkelijke dan wel de vereenvoudigde schakeling wordt gebruikt.

Voorbeeld :

$$\begin{aligned} &OF\{EN[x, z], EN[NIET(x), z], EN[NIET(x), Niet(y)]\} \\ &= xz + x^c z + x^c y^c \\ &= (x + x^c) z + x^c y^c \\ &= z + x^c y^c \\ &= OF\{z, EN[NIET(x), NIET(y)]\} \end{aligned}$$

Het vereenvoudigen van een logische schakeling komt dus eigenlijk neer op het vereenvoudigen van de overeenkomstige B-polynoom. In wat volgt wordt aan de hand van een voorbeeld een algemene werkwijze gedemonstreerd om dergelijke vereenvoudiging uit te voeren. In vele gevallen kan het 'sneller', maar dat is dan afhankelijk van het inzicht en de ervaring van de rekenaar.

Voorbeeld : $xz + x^c yz + x^c y^c$

a) Breng de te vereenvoudigen B-polynoom in normaalvorm :

$$xy^c z + x^c yz + x^c y^c z + x^c y^c z^c + xyz$$

b) Groepeer de termen zonder gecomplementeerde veranderlijken, de termen met één gecomplementeerde veranderlijke, de termen met twee gecomplementeerde veranderlijken, enz.

$$xyz + xy^c z + x^c yz + x^c y^c z + x^c y^c z^c$$

c) Groepeer de termen in paren, zodanig dat de termen van een paar slechts in één van de veranderlijken verschillen van elkaar. Voeg desnoods termen bij door beroep te doen op de idempotentie van de *B*-bewerkingen ($u = u + u$ en $u = uu$).

$$(xyz + xy^c z) + (x^c yz + x^c y^c z) + (x^c y^c z + x^c y^c z^c)$$

d) Breng de gemeenschappelijke factoren buiten haakjes :

$$xz(y + y^c) + x^c z(y + y^c) + x^c y^c (z + z^c) = xz + x^c z + x^c y^c$$

e) Herhaal c) en d) zo nodig :

$$xz + x^c z + x^c y^c = (x + x^c)z + x^c y^c = z + x^c y^c$$

De logische schakeling

$$OF\{EN[x, z], EN[NIET(x), y, z], EN[NIET(x), NIET(y)]\}$$

kan dus vereenvoudigd worden tot :

$$OF\{z, EN[NIET(x), NIET(y)]\}$$